

# Coordination entre producteurs et maîtrise des aléas de demande

*Séverine GAUCHER*  
*Vincent HOVELAQUE*  
*Louis-Georges SOLER*

**Coordination between firms and supply organization**

**Key-words:**

stock policy, supply policy, coordination, food chain, supply chain management

**Summary** – In this paper, we analyse the inventory and ordering policies of two firms, when (i) each firm has its own supplier and market but, (ii), the first firm may act as a second supplier of the second one. This allows us to study the interest of improving horizontal coordination between producers in order to minimize shortages or overstocking phenomena due to demand hazards: such producer-to-producer relationships are indeed more and more developed in numerous agro-food chains (like fruit chains). We develop a general newsvendor-like formulation of the optimal procurement and inventory policies, and calculate chain profits according to various levels of coordination between the two firms. An application to the case of a uniform demand is analysed more precisely. We then use a numerical analysis to define the conditions under which a high level of coordination may be interesting for both firms and the whole chain.

**Coordination entre producteurs et maîtrise des aléas de demande**

**Mots-clés:**

politiques de stockage, politiques d'achat, coordination inter-entreprises, chaîne d'approvisionnement

**Résumé** – Cet article propose une analyse des politiques de commande et de stockage entre deux entreprises, chacune disposant de son propre fournisseur et de son propre débouché, mais l'une pouvant éventuellement agir comme un second fournisseur pour l'autre. On étudie ainsi l'intérêt des démarches de regroupement de l'offre actuellement mises en œuvre dans de nombreuses filières agro-alimentaires (comme, par exemple, les filières de fruits frais), afin de minimiser l'impact des aléas de demande sur les producteurs. Une formalisation générale de ce problème est proposée, visant à définir les politiques optimales de stockage et de commande ainsi que les espérances de profit de chaque opérateur dans le cadre de différents scénarios de coordination entre les deux entreprises. Une application au cas d'une demande distribuée uniformément fait l'objet d'une analyse plus approfondie. Sur la base d'une application numérique, on montre quelles seraient, dans ce cas, les politiques à privilégier selon le niveau des marges sur le marché final et les coûts de transferts.

\* INRA, LORIA, 65, bd de Brandebourg, 94205 Ivry sur Seine cedex  
e-mail: gaucher@ivry.inra.fr; soler@ivry.inra.fr

\*\* ENSAR/INSFA, Département Économie rurale et Gestion, 65, rue de Saint Brieuc, CS 84125, 35042 Rennes cedex  
e-mail: Vincent.Hovelaque@agrorennes.educagri.fr

Les auteurs remercient les deux rapporteurs pour leurs commentaires et leurs suggestions. Les erreurs qui resteraient dans le texte relèvent de la seule responsabilité des auteurs.

LES aléas d'offre et de demande jouent de façon importante sur l'organisation des relations entre clients et fournisseurs dans les filières d'approvisionnement du secteur agroalimentaire. Ces aléas sont souvent à la source de conflits liés à l'apparition momentanée de stocks excédentaires qui pèsent sur les performances des entreprises ou de ruptures qui perturbent la relation au consommateur final.

De nombreux travaux montrent l'intérêt d'une plus grande coordination au sein des filières de production et de commercialisation pour réduire les stocks et les délais et améliorer le taux de service. Les solutions peuvent relever de plusieurs types d'intervention :

– Des démarches qui visent à accroître la réactivité des entreprises engagées dans une relation client-fournisseur, par exemple, au moyen d'une plus grande circulation de l'information. C'est là un des objectifs des méthodes de gestion intégrée des chaînes d'approvisionnement (« *Supply Chain Management* » en anglais), et d'une façon générale des systèmes informatisés inter-entreprises pour la gestion des commandes et des stocks (EDI<sup>(1)</sup>, ECR<sup>(2)</sup>). De nombreux travaux ont examiné ces démarches, en particulier dans le secteur agro-alimentaire (Harris *et al.*, 1999; Cooke, 1994; Ellram *et al.*, 1989; Fiorito *et al.*, 1995; Kurnia *et al.*, 1998; Davies, 1997; Penman, 1997).

– Des démarches qui visent à donner de la flexibilité dans la mise en œuvre des plans de production et de vente: différenciation retardée des produits ou contrats d'approvisionnement flexibles, par exemple (Nakhla, 1993; Van Hoek, 1997; Iyer et Bergen, 1997; Tsay *et al.*, 1999; Cachon et Larivière, 1999).

– Des démarches qui visent à absorber l'effet des aléas. Par exemple, la multilocalisation des sites de production, ou l'approvisionnement auprès de plusieurs fournisseurs peuvent permettre de répondre à cet objectif (Lau et Lau, 1994; Ganeshan *et al.*, 1999).

C'est ce dernier point que nous abordons ici. Plus précisément, nous examinons l'intérêt de favoriser de plus fortes coordinations horizontales entre producteurs en vue d'assurer une meilleure maîtrise des flux de produits dans des contextes où les aléas de production et de demande sont importants. Par exemple, la création de groupements de producteurs ou la mise en place de structures de mise en marché communes à différentes unités de production ne subissant pas aux mêmes moments les mêmes aléas peut, en rendant possibles des flux de produits entre producteurs, permettre de réduire les risques de mauvais ajustements instantanés entre offre des fournisseurs et demande des clients.

---

<sup>(1)</sup> Échange de données informatisées.

<sup>(2)</sup> *Efficient Consumer Response*.

Cette question est importante, d'une part, parce qu'elle conditionne les choix de mode d'organisation entre les activités de production et commerciales dans les filières agro-alimentaires (Soler et Tanguy, 1998), d'autre part, parce qu'elle peut avoir des effets sur le fonctionnement des marchés de matières premières à destination des transformateurs ou de produits frais à destination des distributeurs. C'est ce que nous explicitons dans la première partie de l'article en nous appuyant sur des cas empiriques. Dans cette même partie, nous proposons une rapide revue de la littérature théorique en recherche opérationnelle et présentons quelques modèles élaborés en vue de définir les politiques de commande optimales dans des relations clients-fournisseurs en présence d'aléas importants.

Dans la seconde partie, nous proposons un modèle pour analyser l'intérêt (et les limites) de ces démarches de regroupement de l'offre vis-à-vis du problème de maîtrise des effets des aléas. Nous présentons ensuite les différents scénarios étudiés sur la base de ce modèle et, dans la dernière partie, nous appliquons ce modèle à un cas empirique, pour dégager des propositions susceptibles d'orienter les réflexions en pratique.

## COORDINATION HORIZONTALE ET ALÉAS DE DEMANDE

### Exemples empiriques

De nombreux travaux sur l'évolution des filières agro-alimentaires en Europe soulignent le renforcement de diverses modalités de coordination horizontale entre producteurs et/ou entre intermédiaires (industriels, négociants, coopératives) des filières agro-alimentaires. Ces évolutions prennent des formes variées : regroupement de l'offre agricole par le biais d'associations de producteurs, ou de GIE ; création de « bureaux de vente » communs à des producteurs qui restent indépendants dans leurs choix de production mais se coordonnent sur le plan commercial ; alliances entre coopératives ou entre industriels ; accords d'approvisionnement entre coopératives et négociants...

Ces évolutions répondent à plusieurs enjeux économiques. Une première raison concerne le lien entre concentration horizontale et pouvoir de marché. Face à un secteur de la distribution très concentré, les opérateurs amont tentent ainsi de gagner en pouvoir de négociation en concentrant de façon plus forte l'offre de produits. Nous ne discutons pas ce point ici, mais il soulève clairement des questions du point de vue de l'efficacité économique des filières de production-distribution de produits alimentaires (Rey et Tirole, 2000).

La deuxième raison concerne la baisse des coûts permise par le regroupement des flux, tant sur plan logistique que sur celui des politiques de stockage et de commande. C'est une des raisons qui conduit,

d'ailleurs, les distributeurs à inciter des regroupements au niveau des producteurs en amont des filières agro-alimentaires.

Une troisième raison réside dans la recherche d'une meilleure régularisation des flux de produits face aux aléas d'offre et de demande. Plusieurs exemples permettent d'illustrer ce point. Par exemple, les filières de fruits frais connaissent périodiquement des difficultés importantes du fait des décalages conjoncturels qui surviennent entre l'offre et la demande. Dans ces filières, le secteur de la production est très atomisé et de nombreux metteurs en marché de petite taille se trouvent périodiquement en rupture ou en surstocks face à des clients souvent plus concentrés. La périssabilité du produit rend difficiles des pratiques de report de quantités pour répondre à ces aléas : ainsi, si l'opérateur est en rupture, il perd des parts de marché qu'il ne retrouve pas aisément ensuite ; s'il est en surstocks, il est conduit à écouler les produits à des prix « cassés », tirant ensuite l'ensemble des cours vers le bas.

Un tel mécanisme explique bon nombre des problèmes observés dans le secteur des fruits. Une des adaptations envisagées concerne la réduction de l'atomisation de l'offre agricole par la mise en place de « bureaux de vente » communs à plusieurs unités de production et de conditionnement, explicitement évoquée dans le cadre de l'OCM fruits. Le premier objectif de ces nouvelles modalités d'organisation de la production est le regroupement de l'offre afin d'obtenir des marchés portant sur des volumes importants, comme ceux de la grande distribution. Le second objectif est d'assurer la continuité de l'approvisionnement en direction de ces centrales d'achat et cela en rendant possibles des ajustements et des échanges de produits entre producteurs, ceux qui sont momentanément excédentaires venant compenser les déficits de ceux qui se trouvent en rupture.

Un deuxième exemple est bien explicité dans Rademakers et McKnight (1998) : il concerne les relations entre industriels face aux demandes de leurs clients en aval dans le cas des « filières pomme de terre ». Le développement de formes de coopération horizontale entre opérateurs concurrents est fondamentalement lié à la question de la flexibilité et de la continuité de l'approvisionnement vis-à-vis des distributeurs, dans un contexte où tant les surstocks que les ruptures génèrent des coûts élevés. Pour ne pas avoir à mettre en place des capacités de production excédentaires, mais aussi pour ne pas avoir à refuser une commande à un distributeur, les producteurs-industriels du secteur ont ainsi développé des « partenariats » qui les amènent à échanger entre eux des commandes et des produits.

Un troisième exemple concerne les relations entre usines au sein d'un groupe industriel dans le secteur des légumes transformés (Soler et Tanguy, 1998). Dans ce secteur où les marchés finaux sont très concurrentiels (et donc instables), la difficulté à programmer les ventes de façon précise oblige à des révisions fréquentes des plans commerciaux. Ces révisions induisent, à leur tour, des modifications périodiques des plans de

production qui peuvent générer des surcoûts, voire des remises en cause dans les schémas d'approvisionnement attribués en début d'année aux fournisseurs. Il faut alors trouver les formes d'organisation industrielle qui minimisent ces risques de révisions trop fréquentes des plans de production et d'approvisionnement. Une des voies suivies en pratique concerne l'attribution de plans de production, non pas au niveau élémentaire d'un site de production (une usine, par exemple), mais au niveau d'un ensemble de sites favorisant ainsi les échanges de produits entre ces sites et réduisant les effets des aléas d'offre ou demande. Il faut alors trouver les bons schémas d'organisation et de regroupement des sites de production de façon à faciliter cet équilibre offre-demande, sans induire des surcoûts trop élevés du fait du développement des flux de produits « horizontaux » entre sites de fabrication.

On perçoit, à partir des exemples évoqués ci-dessus, que l'intérêt de développer de nouvelles formes de coordination horizontale au travers d'un regroupement de l'offre ou d'une centralisation des ventes va dépendre d'au moins deux éléments : d'un côté, les coûts (par exemple, logistiques) associés à l'accroissement des flux entre producteurs, vont diminuer l'intérêt de telles démarches ; d'un autre côté, la possibilité de réduire les surstocks ou les ruptures peut améliorer les profits des entreprises concernées. Sous quelles conditions ces démarches doivent-elles alors être favorisées ? Sur quelle base doit être envisagée la coordination entre ces unités ? Ce sont ces questions que nous étudions dans cet article.

Pour cela, nous analysons l'impact de ces nouveaux modes d'organisation de l'approvisionnement sur les politiques de commande et de stockage des opérateurs confrontés à un environnement aléatoire. Nous nous inscrivons en ce sens dans la lignée de travaux menés en recherche opérationnelle, sans intégrer ici des préoccupations d'économie industrielle comme l'analyse des jeux stratégiques entre opérateurs.

## Revue de la littérature sur les politiques de commande

De nombreux travaux en recherche opérationnelle et sciences de gestion montrent l'intérêt d'une plus grande coordination au sein des filières de production et de commercialisation pour réduire les stocks et les délais et améliorer le taux de service<sup>(3)</sup>. S'appuyant sur l'analyse des relations d'approvisionnement entre un client et un fournisseur, ils déterminent, en particulier, les politiques optimales de commande quand la demande est aléatoire. Cependant, des difficultés peuvent apparaître dans la mise en œuvre de ces démarches, notamment dans le cas de

---

<sup>(3)</sup> On entend en général par taux de service le pourcentage de commandes satisfaites par rapport aux commandes totales.

structures verticales complexes (multi-fournisseurs entre autres). Nous proposons dans cette section une revue de la littérature dédiée à l'analyse de ces politiques de commande.

Dans le cadre d'une structure verticale composée d'un client et d'un fournisseur, une part substantielle de la littérature OR/MS<sup>(4)</sup> s'appuie sur un modèle classique de gestion des stocks dans un contexte de demande aléatoire, le modèle du marchand de journaux (également connu sous le nom de « *newsboy model* », voir Nahmias, 2001). Ce modèle permet de calculer la quantité optimale de commande qu'un client doit adresser à un fournisseur afin de maximiser son espérance mathématique de profit, notée ici  $\Pi(q)$ . La séquence est la suivante: le client commande une quantité  $q$  sur la base d'une estimation *ex ante* de la demande du marché final  $d$ , puis le fournisseur lui livre  $q$  et la demande est révélée. La demande est supposée aléatoire, de densité  $f(d)$ . Chaque unité de bien commandé permet la commercialisation d'une unité de produit fini, le fournisseur étant supposé pouvoir fournir tout volume commandé par le client. Le modèle de base fait en effet l'hypothèse que le fournisseur n'est pas limité par sa capacité de production et peut donc honorer la totalité de la commande du client. Par ailleurs, il n'est pas non plus contraint par d'éventuels aléas de production qui pourraient également limiter son offre et l'empêcher de fournir la totalité des volumes commandés<sup>(5)</sup>. Le prix d'achat unitaire du client ( $c$ ) ainsi que le prix de vente unitaire sur le marché final ( $p$ ) sont tous deux fixés de façon exogène (le modèle classique du marchand de journaux ne les considère pas en effet comme des variables de décision pour les opérateurs). L'échange se déroule sur une seule période, les stocks restant en fin de période ou les commandes non satisfaites étant supposés perdus. Le client doit donc, dans ce cadre d'hypothèse, définir la quantité  $q^* = \underset{q}{\operatorname{argmax}} \Pi(q)$  avec :

$$\Pi(q) = \int_0^q (pd - cq) f(d) dd + \int_q^\infty (pq - cq) f(d) dd \quad (1)$$

L'entreprise limite ainsi au maximum les coûts liés aux éventuels surstocks ou ruptures de fin de période, créés par le décalage entre la commande  $q$  et la réalisation de la demande. Le premier terme prend en compte les cas où la demande  $d$  est inférieure à la commande  $q$  (ce qui génère donc des surstocks) tandis que le second terme prend en compte les situations dans lesquelles la demande est plus forte que la quantité initialement commandée (ce qui se traduit par des ruptures).

Tout en conservant cette structure verticale et la formalisation donnée par le modèle du marchand de journaux, de nombreux travaux ont contribué à l'analyse des politiques optimales de commande en univers

<sup>(4)</sup> OR/MS: *Operations Research and Management Science*.

<sup>(5)</sup> Ces deux hypothèses ont été relâchées par certains auteurs: voir par exemple Cachon et Larivière (1999) pour l'introduction d'une contrainte de capacité en amont et Bassok et Akella (1991) pour l'introduction d'aléas de production.

aléatoire en relâchant l'une ou l'autre des hypothèses de base exposées ci-dessus. Ainsi, dans un modèle à deux périodes, Parlar et Weng (1997), ainsi que Lau et Lau (1998) autorisent une deuxième commande. Bassok et Akella (1991) ainsi que Anupindi et Akella (1993) modélisent une incertitude sur l'offre (voir Khouja, 1995 et Lau, 1997 pour des revues de littérature plus complètes). La plupart de ces travaux considèrent des schémas dans lesquels il y a coordination parfaite entre le fournisseur et le client. Bien que certains d'entre eux (Iyer et Bergen 1997, Parlar et Weng, 1997) comparent des systèmes coordonnés et non coordonnés, à notre connaissance, ils ne discutent que rarement l'impact des politiques de commande sur les profits individuels des deux acteurs et se placent généralement uniquement du point de vue du client.

D'autres travaux se sont intéressés au point de vue du fournisseur, notamment dans le cadre de modèles déterministes (demande connue *ex ante*) proposant de définir non plus des politiques de commande mais des politiques de prix (rabais sur quantités) optimales, par lesquelles le fournisseur peut inciter le client à commander les volumes maximisant son propre profit. Dans cette voie, Jeuland et Shugan (1983) identifient plusieurs mécanismes de rabais permettant d'augmenter le profit des deux acteurs; Lal et Staelin (1984) ainsi que Monahan (1984) proposent des formalisations visant à déterminer le niveau optimal de rabais à retenir; Weng (1995) compare l'impact de différents mécanismes de rabais sur les profits, etc. Dans un contexte de demande aléatoire, ce type de politiques de prix a également été étudié, mais les rabais sont ici utilisés par le client comme mécanisme d'incitation des consommateurs à l'achat, afin de vendre les stocks excédentaires et limiter ainsi les coûts de stockage *ex post* (Lin et Kroll, 1997; Khouja, 1995).

En conservant la formalisation apportée par le modèle du marchand de journaux, d'autres travaux plus récents se sont attachés à définir des politiques optimales de commande dans le cadre d'accords contractuels entre un fournisseur et un client et ont de fait analysé le point de vue du fournisseur, notamment en tenant compte de son comportement stratégique (Cachon et Lariviere, 1999). Examinant les profits des deux acteurs, ils cherchent à définir les conditions d'implémentation de différentes formes de contrat (Tsay, 1999). Parmi d'autres, Anupindi et Bassok (1999) et Tsay *et al.* (1999) proposent des revues très complètes de ce type d'approches. Enfin, un dernier courant de recherche alloue un pouvoir de décision au fournisseur en l'autorisant à définir le prix intermédiaire (ce qui n'est pas le cas dans le modèle de base): c'est le cas des travaux portant sur les politiques de commande dans lesquels les inventus peuvent être rachetés par le fournisseur. Ici, si le client continue à définir sa quantité de commande, c'est le fournisseur qui définit le prix de vente et le prix de rachat « *sold credit* » (Padmanabhan et Png, 1997; Lau et Lau, 1999). Dans ces deux derniers types d'approche, le profit des deux acteurs est pris en compte et on donne les conditions auxquelles la coordination leur est profitable.

Cependant, si l'intérêt d'une plus grande coordination apparaît clairement dans une relation simple entre un fournisseur et un client, les conclusions paraissent *a priori* moins claires dès que la structure verticale est plus complexe. D'autres travaux se sont donc focalisés sur cet aspect, la plupart d'entre eux s'attachant à évaluer l'intérêt relatif d'utiliser un ou plusieurs fournisseurs. Ainsi, Sculli et Wu (1981) ou Kelle et Silver (1990) montrent que faire appel à deux fournisseurs similaires permet de diminuer le niveau de stock en deçà duquel une nouvelle commande est nécessaire pour éviter des phénomènes de rupture (stock de sécurité) pour différentes distributions de demande et de délais de livraison. Dans la lignée de ce travail, Sculli et Shum (1990) montrent que la répartition d'une commande entre plusieurs fournisseurs permet de réduire les délais de livraison. D'autres auteurs étudient l'intérêt relatif de faire appel à un ou deux fournisseur(s) différant par leurs délais de livraison, la qualité de leur service et leur prix de vente (Lau et Lau, 1994; Janssen et de Kok, 1999) ou encore leur fiabilité (Ganeshan *et alii*, 1999). Il existe par contre peu de travaux consacrés à l'analyse des modes de coordination à proprement parler. C'est dans cette optique que se situent Gavirneni et Tayur (1999), en étudiant une structure verticale composée d'un fournisseur et de deux clients, confrontés chacun à une demande aléatoire. Ils comparent, sur cette base, différentes organisations qui se distinguent selon deux axes : avec ou sans transmission d'informations sur les niveaux des stocks par chaque client au fournisseur ; avec ou sans différenciation retardée (permettant ou non au fournisseur de traiter les commandes des clients de façon séparée). Les auteurs montrent alors que l'intérêt de la coopération et de la transmission d'information varie selon la variabilité de la demande, les capacités de chaque client et les coûts de possession.

Nous plaçant dans cette perspective, et au vu des exemples réels présentés ci-dessus, nous examinons maintenant les modalités de coordination entre deux firmes produisant des biens de nature similaire et disposant chacune de leur propre fournisseur et de leur propre marché final mais pouvant, sous certaines conditions, échanger entre elles une partie de ces biens. On admet ici que ces firmes ne sont concurrentes ni pour leur approvisionnement ni sur les marchés finaux. On représente ainsi, de façon stylisée, le problème empirique du regroupement de l'offre présenté ci-dessus.

## PRÉSENTATION DU MODÈLE

### Définition du problème

Nous proposons d'étudier les relations entre deux entreprises  $F_1$  et  $F_2$  qui sont confrontées à des demandes aléatoires  $d_1$  (resp.  $d_2$ ) modélisées par des lois statistiques de fonctions de densité  $f(d_1)$  (resp.  $f(d_2)$ ).

Les deux entreprises  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) achètent leur matière première à un coût unitaire  $c_1$  (resp.  $c_2$ ), transforment la totalité en produits finis qui sont vendus sur le marché final  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) au prix unitaire  $p_1$  (resp.  $p_2$ ). Pour simplifier l'analyse, nous faisons l'hypothèse qu'une unité de matière première donne une unité de produit fini. Nous considérons par ailleurs qu'il n'y a ni incertitudes sur l'approvisionnement ni contraintes de capacité en amont : toute quantité commandée auprès de chaque fournisseur est donc livrée.

Outre les coûts d'approvisionnement  $c_1$  et  $c_2$ , nous supposons qu'en cas de livraison de matière de  $F_1$  vers  $F_2$ , l'entreprise  $F_1$  supporte un coût unitaire de transfert  $c_t$  qui correspond, par exemple, à des coûts logistiques et que  $F_2$  paie cette matière à un prix unitaire  $p_t$ . Tous les autres coûts classiques de transformation sont normalisés à zéro. Cette hypothèse pourrait être facilement levée, mais ne modifierait en rien l'analyse générale. On suppose enfin que  $c_1 + c_t \leq p_t \leq p_2$ , c'est-à-dire que ni  $F_1$  ni  $F_2$  ne font de marges négatives sur les quantités échangées entre elles et qu'un transfert est possible uniquement de  $F_1$  vers  $F_2$ .

Les deux entreprises doivent prendre les décisions suivantes : (i)  $F_1$  doit définir la quantité de commande  $q_1$  auprès d'un fournisseur de matière première  $S_1$  en fonction d'une demande aléatoire sur le marché final  $M_1$  et d'une possible demande de l'entreprise  $F_2$  en cas de rupture ; (ii)  $F_2$  doit définir la quantité de commande  $q_2$  auprès d'un fournisseur de matière première  $S_2$  en fonction d'une demande aléatoire sur le marché final  $M_2$  et d'un possible reconstituer en cas de rupture auprès de l'entreprise  $F_1$ .

Avant d'aller plus loin, il est utile de préciser la signification de ce schéma au regard des exemples empiriques que l'on veut discuter. On distingue deux contextes différents :

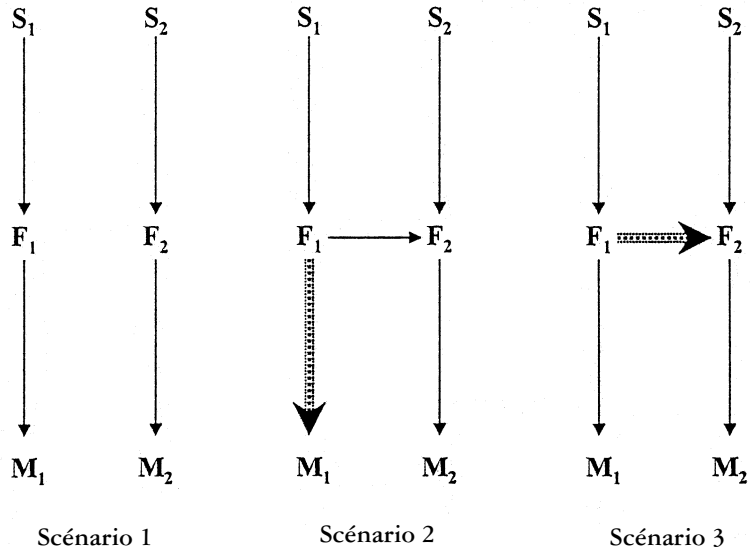
– Dans un premier type de situation, on s'intéressera uniquement à  $F_1$  et  $F_2$ . Celles-ci sont, par exemple, deux entreprises indépendantes de production et de commercialisation. Elles ne font pas appel réellement à des fournisseurs extérieurs. Simplement, elles ont à définir les quantités mises en production en prenant en compte, éventuellement, la possibilité d'un transfert de l'une vers l'autre si elles conviennent de se coordonner pour mieux répondre aux risques de surstock et de rupture.

– Dans un second type de situation, on s'intéressera à l'ensemble de la filière ( $F_1, F_2, S_1, S_2$ ). Dans ce cas, les choix d'organisation doivent prendre en compte les conséquences possibles sur des fournisseurs extérieurs. Il peut s'agir par exemple des relations entre une coopérative et un négociant, chacun ayant sa propre base de fournisseurs avec lesquels il entretient des relations contractuelles stabilisées. Il faut alors rechercher des solutions qui maximisent la somme des profits des divers opérateurs de la filière.

### Scénarios étudiés

Dans le cadre du modèle du marchand de journaux, une même période se décompose en trois séquences successives: (1) l'entreprise commande une quantité qui lui est livrée instantanément en un seul lot, (2) la demande est révélée, (3) si la demande est supérieure à la quantité commandée, l'entreprise est en rupture (il n'y a pas de report de vente), sinon elle supporte des stocks (ne pouvant être vendus à la période suivante). Par la suite, les éléments seront indicés par «  $i, j$  » avec  $i$  représentant l'entreprise ( $i = 1,2$ ) et  $j$  le scénario ( $j = 1,2,3$ ). Les scénarios étudiés sont les suivants (voir aussi figure 1):

Figure 1.  
Scénarios étudiés



**Scénario 1:** Ce scénario correspond à une stratégie d'indépendance des deux entreprises  $F_1$  et  $F_2$ . Dans ce cas,  $F_1$  et  $F_2$  définissent indépendamment leurs quantités optimales de commande  $q_{1.1}^*$  et  $q_{2.1}^*$  sans envisager un transfert de  $F_1$  vers  $F_2$ . Les étapes de ce scénario sont alors définies de la manière suivante:

1.  $F_1$  et  $F_2$  commandent respectivement  $q_{1.1}$  et  $q_{2.1}$  sur leur propre marché  $S_1$  et  $S_2$ .
2. La demande sur chaque marché  $M_1$  et  $M_2$  est révélée.
3.  $F_1$  et  $F_2$  satisfont respectivement leur propre marché  $M_1$  et  $M_2$ .

**Scénario 2:** On considère ici que  $F_1$  peut servir de fournisseur pour  $F_2$  uniquement si  $F_2$  est en rupture. Néanmoins  $F_1$  donne d'abord priorité à son propre marché  $M_1$ . Pour ce scénario, les étapes sont donc :

1.  $F_1$  et  $F_2$  commandent respectivement  $q_{1.2}$  et  $q_{2.2}$  sur leur propre marché  $S_1$  et  $S_2$ .
2. La demande sur chaque marché  $M_1$  et  $M_2$  est révélée.

3.  $F_1$  et  $F_2$  satisfont respectivement leur propre marché  $M_1$  et  $M_2$ .
4. Si  $F_1$  a des stocks et  $F_2$  des ruptures, alors un transfert de  $F_1$  vers  $F_2$  a lieu avec un surcoût pour  $F_1$  égal à  $c_t$  et un prix d'achat pour  $F_2$  égal à  $p_t$ .

Ce scénario formalise une relation entre  $F_1$  et  $F_2$  appuyée sur des échanges par le biais d'un marché spot.

**Scénario 3 :** Dans ce cas,  $F_1$  se positionne avant tout comme fournisseur potentiel de  $F_2$  en cas de rupture pour  $F_2$ . Après un éventuel transfert vers  $F_2$ ,  $F_1$  satisfait son propre marché  $M_1$ . La séquence est donc :

1.  $F_1$  et  $F_2$  commandent respectivement  $q_{1,3}$  et  $q_{2,3}$  sur leur propre marché  $S_1$  et  $S_2$ .
2. La demande sur chaque marché  $M_1$  et  $M_2$  est révélée.
3.  $F_2$  satisfait son marché  $M_2$ .
4.  $F_1$  satisfait en priorité une éventuelle rupture  $F_2$  (avec un surcoût  $c_t$  pour  $F_1$  et un prix d'achat  $p_t$  pour  $F_2$  puis son marché  $M_1$ .

Ce troisième scénario formalise des échanges s'effectuant dans le cadre d'un contrat d'approvisionnement passé entre  $F_1$  et  $F_2$  et dans lequel  $F_2$  assure de façon principale la fonction commerciale.  $F_1$  lui garantit alors un approvisionnement rigide, couvrant son « marché de base » et la part résiduelle des volumes détenus par  $F_1$  basculent, selon les besoins de  $F_2$ , entre  $F_2$  et  $M_1$ . Ce type de contrat existe dans de nombreuses filières viti-vinicoles, dans les relations entre coopératives et négoce.

## Objectifs

Nous étudions les trois scénarios en comparant les profits maximum de chaque entreprise ainsi que le profit total de la filière. En particulier, nous déterminons quelle est la meilleure stratégie de coordination entre  $F_1$  et  $F_2$  en fonction des prix, des coûts et de la taille relative de chaque marché. Dans la suite,  $\Pi_{i,j}^*(q_{i,j}^*)$  et  $\Gamma_{i,j}(q_{i,j}^*)$  dénotent respectivement l'espérance de profit maximal de l'entreprise  $F_i$  et l'espérance de profit du fournisseur  $S_i$  dans le scénario  $j$ .

Le profit total  $\Pi_j^*$  de la filière pour le scénario  $j$  est obtenu par :

$$\Pi_j^* = \Pi_{1,j}^*(q_{1,j}^*) + \Pi_{2,j}^*(q_{2,j}^*) + \Gamma_{1,j}(q_{1,j}^*) + \Gamma_{2,j}(q_{2,j}^*)$$

Nous faisons ici l'hypothèse que les deux fournisseurs  $S_1$  et  $S_2$  n'ont pas d'alternative et sont dépendants des commandes des deux entreprises. Leurs propres coûts de production sont supposés nuls. Le profit total de la filière s'écrit donc simplement :

$$\Pi_j^* = \Pi_{1,j}^*(q_{1,j}^*) + \Pi_{2,j}^*(q_{2,j}^*) + c_1 q_{1,j}^* + c_2 q_{2,j}^*$$

## ANALYSE GÉNÉRALE

Dans cette partie, nous proposons une analyse générale de ce problème en considérant que la demande  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ , du marché  $M_j$  suit une loi statistique de moyenne  $\mu_i$  et de fonction de densité  $f_i(\cdot)$ . L'analyse va porter, dans chaque scénario  $j$ , sur les positions relatives des quantités d'approvisionnement  $q_{1,j}$  et  $q_{2,j}$  (variables de décision) par rapport aux demandes  $d_1$  et  $d_2$ .

### Scénario 1 : aucune coordination entre $F_1$ et $F_2$

En l'absence de coordination entre  $F_1$  et  $F_2$ , chacune des deux entreprises doit faire face au problème classique du marchand de journaux exposé précédemment. Chacune résout donc indépendamment un «*newsboy model*» sur la base de la demande aléatoire  $D_i$  qui lui est adressée. Pour une quantité d'approvisionnement  $q_{i,1}$ , deux situations peuvent alors se produire : soit  $d_i \leq q_{i,1}$  et  $F_i$  doit supporter des coûts de stockage (produits non vendus sur la période), soit  $q_{i,1} < d_i$  et  $F_i$  est en rupture. En reprenant l'équation (1), le profit espéré par  $F_i$  peut alors s'écrire :

$$\Pi_{i,1}(q_{i,1}) = p_i \mu_i - c_i \int_0^{q_{i,1}} (q_{i,1} - d_i) f_i(d_i) dd_i - (p_i - c_i) \int_{q_{i,1}}^{\infty} (d_i - q_{i,1}) f_i(d_i) dd_i \quad (2)$$

Cette équation s'explique de la manière suivante : le premier terme correspond à l'espérance de chiffre d'affaires, le deuxième exprime le coût moyen de surstock (toute unité non vendue a un coût égal à « $c_i$ »), et le troisième le coût moyen de la rupture (toute vente perdue correspond à un manque à gagner de « $p_i - c_i$ »). La fonction de profit étant concave en  $q_{i,1}$ , il suffit de résoudre  $d(\Pi_{i,1}(q_{i,1}))/d(q_{i,1}) = 0$  pour obtenir la quantité de commande optimale :

$$q_{i,1}^* = F^{-1}\left(\frac{p_i - c_i}{p_i}\right)$$

où  $F_i^{-1}(\cdot)$  représente la fonction inverse de la fonction de répartition de  $D_i$ .

### Scénarios 2 et 3 : coordination entre $F_1$ et $F_2$

Nous supposons maintenant que les deux firmes se coordonnent en échangeant des informations sur le surstock potentiel de  $F_1$  et la rupture potentielle de  $F_2$ . Cette hypothèse revient à considérer que les deux entreprises optimisent indépendamment leurs approvisionnements puis échangent des informations sur les probabilités d'occurrence et les valeurs moyennes du surstock de  $F_1$  et de la rupture de  $F_2$ . Le surstock potentiel  $T_1$  de  $F_1$  et la rupture potentielle  $T_2$  de  $F_2$  sont calculés respectivement à partir des quantités optimales  $q_{1,1}^*$  et  $q_{2,1}^*$  et s'écrivent :

$$T_1 = \int_0^{q_{1.1}^*} (q_{1.1}^* - d_1) f_1(d_1) dd_1$$

$$T_2 = \int_{q_{2.1}^*}^{\infty} (d_2 - q_{2.1}^*) f_2(d_2) dd_2$$

Les probabilités d'occurrence liées à  $T_1$  et  $T_2$  sont respectivement :

$$\beta_1 = \int_0^{q_{1.1}^*} f_1(d_1) dd_1 \quad \text{et} \quad \beta_2 = \int_{q_{2.1}^*}^{\infty} f_2(d_2) dd_2$$

Ces informations sont à la base de l'optimisation du profit des deux firmes  $F_1$  et  $F_2$  dans les deux scénarios suivants.

### Scénario 2: priorité à $M_1$

Dans ce scénario, chaque firme satisfait en priorité son propre marché à partir d'un approvisionnement auprès de son propre fournisseur ( $q_{1.2}$  et  $q_{2.2}$ ). Si  $F_1$  et  $F_2$  font face respectivement à des surstocks et des ruptures, alors un transfert de  $F_1$  à  $F_2$  est effectué (pour une quantité égale au minimum entre surstock et rupture). La quantité de transfert est calculée en étudiant les différentes valeurs de  $d_1$  par rapport à  $q_{1.2}$  et  $d_2$  par rapport à  $q_{2.2}$ .

Cette analyse est proposée de manière globale dans les premières parties des annexes A.1 et A.2, ce qui permet de donner l'expression générale des profits optimaux de  $F_1$  et  $F_2$  :

$$\begin{aligned} \Pi_{1.2}(q_{1.2}) = & \int_{q_{1.2}}^{\infty} ((p_1 - c_1)q_{1.2}) f_1(d_1) dd_1 \\ & + \beta_2 \left[ \int_0^{q_{1.2} - T_2} ((p_1 - c_1)d_1 + (p_t - c_1 - c_t)T_2 - c_1(q_{1.2} - d_1 - T_2)) f_1(d_1) dd_1 \right. \\ & \left. + \int_{q_{1.2} - T_2}^{q_{1.2}} ((p_1 - c_1)d_1 + (p_t - c_1 - c_t)(q_{1.2} - d_1)) f_1(d_1) dd_1 \right] \\ & + (1 - \beta_2) \int_0^{q_{1.2}} (p_1 d_1 - c_1 q_{1.2}) f_1(d_1) dd_1 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{2.2}(q_{2.2}) = & \int_0^{q_{2.2}} (p_2 d_2 - c_2 q_{2.2}) f_2(d_2) dd_2 \\ & + \beta_1 \left[ \int_{q_{2.2}}^{q_{2.2} + T_1} ((p_2 - c_2)q_{2.2} + (d_2 - q_{2.2})p_t - c_2 q_{2.2}) f_2(d_2) dd_2 \right. \\ & \left. + \int_{q_{2.2} + T_1}^{\infty} (p_2(q_{2.2} + T_1) - (c_2 q_{2.2} + p_t T_1)) f_2(d_2) dd_2 \right] \\ & + (1 - \beta_1) \int_{q_{2.2}}^{\infty} (p_2 - c_2) q_{2.2} f_2(d_2) dd_2 \end{aligned} \quad (4)$$

### Scénario 3 : priorité à $F_2$

Chaque entreprise commande les quantités  $q_{1,3}$  et  $q_{2,3}$ . Si  $F_2$  est en rupture de stock,  $F_1$  approvisionne en priorité  $F_2$  avant de satisfaire son propre marché  $M_1$ . Dans ce scénario,  $F_1$  se définit comme un fournisseur privilégié de  $F_2$  avant d'être vendeur sur le marché  $M_1$ . Comme précédemment, l'analyse porte sur les positions respectives de  $d_1$  et  $d_2$  par rapport à  $q_{1,3}$  et  $q_{2,3}$ . L'explication des formes générales des profits de  $F_1$  et  $F_2$  est donnée dans les annexes B.1 et B.2 :

$$\begin{aligned} \Pi_{1,3}(q_{1,3}) = & \beta_2 \left[ \int_0^{q_{1,3}-T_2} ((p_1 - c_1)d_1 + (p_t - c_1 - c_t)T_2 - c_1(q_{1,3} - d_1 - T_2)) f_1(d_1) dd_1 \right. \\ & \left. + \int_{q_{1,3}-T_2}^{\infty} ((p_1 - c_1)(q_{1,3} - T_2) + (p_t - c_1 - c_t)T_2) f_1(d_1) dd_1 \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ (1 - \beta_2) \left[ \int_{q_{1,3}}^{\infty} (p_1 d_1 - c_1 q_{1,3}) f_1(d_1) dd_1 + \int_0^{q_{1,3}} ((p_1 - c_1) q_{1,3}) f_1(d_1) dd_1 \right]$$

$$\begin{aligned} \Pi_{2,3}(q_{2,3}) = & \int_0^{q_{2,3}} (p_2 d_2 - c_2 q_{2,3}) f_2(d_2) dd_2 \\ & + \int_{q_{2,3}}^{\infty} (p_2 d_2 - c_2 q_{2,3} - p_t(d_2 - q_{2,3})) f_2(d_2) dd_2 \end{aligned} \quad (6)$$

En remplaçant les expressions  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  par leurs valeurs respectives, les expressions générales des profits de chaque entreprise, pour chaque scénario, peuvent être explicitées. Ces profits vont être plus ou moins complexes à optimiser en fonction des hypothèses posées sur les formes des lois de demande. Afin de proposer une analyse détaillée, nous allons faire par la suite l'hypothèse que les demandes suivent des lois uniformes.

## CAS D'UNE DEMANDE DISTRIBUÉE UNIFORMÉMENT

Dans la suite de cet article, on suppose que la demande  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ , suit une loi uniforme  $[\mu_i, \delta_i]$  définie par la fonction de densité de la forme suivante :

$$f_i(d_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_i < (1 - \delta_i)\mu_i \\ \frac{1}{2\delta_i\mu_i} & \text{si } (1 - \delta_i)\mu_i \leq d_i \leq (1 + \delta_i)\mu_i \\ 0 & \text{si } d_i > (1 + \delta_i)\mu_i \end{cases}$$

Cette écriture modélise le fait qu'une entreprise définit sa demande potentielle par une valeur moyenne  $\mu_i$  plus ou moins un certain pourcentage  $\delta_i$ . En d'autres termes, l'entreprise estime l'ensemble des valeurs

possibles de la demande par le segment  $[(1 - \delta_i) \mu_i; (1 + \delta_i) \mu_i]$  dont toutes les occurrences sont équiprobables.

### Scénario 1 : aucune coordination entre $F_1$ et $F_2$

En reprenant l'équation (2), le profit espéré par  $F_i$  peut alors s'écrire :

$$\Pi_{i,1}(q_{i,1}) = p_i \mu_i - c_i \int_{\mu_i(1-\delta_i)}^{q_{i,1}} (q_{i,1} - d_i) f_i(d_i) dd_i - (p_i - c_i) \int_{q_{i,1}}^{\mu_i(1+\delta_i)} (d_i - q_{i,1}) f_i(d_i) dd_i$$

La fonction de profit étant concave en  $q_{i,1}$ , il suffit de résoudre  $d(\Pi_{i,1}(q_{i,1}))/dq_{i,1} = 0$  pour obtenir la quantité de commande optimale :

$$q_{i,1}^* = \mu_i \frac{p_i(1 + \delta_i) - 2\delta_i c_i}{p_i}$$

Le profit optimal de l'entreprise  $F_i$  est alors donné par :

$$\Pi_{i,1}^*(q_{i,1}^*) = \frac{\mu_i(p_i - c_i)(p_i - \delta_i c_i)}{p_i}$$

Le profit du fournisseur  $S_j$  est directement obtenu par :

$$\Gamma_{i,1}(q_{i,1}^*) = c_i q_{i,1}^* = c_i \mu_i \frac{p_i(1 + \delta_i) - 2\delta_i c_i}{p_i}$$

### Scénarios 2 et 3 : coordination entre $F_1$ et $F_2$

Nous supposons maintenant que les deux firmes se coordonnent en échangeant des informations sur le surstock potentiel de  $F_1$  et la rupture potentielle de  $F_2$ . Le surstock potentiel  $T_1$  de  $F_1$  et la rupture potentielle  $T_2$  de  $F_2$  sont calculés respectivement à partir des quantités optimales  $q_{1,1}^*$  et  $q_{2,1}^*$  et s'écrivent :

$$T_1 = \int_{\mu_1(1-\delta_1)}^{q_{1,1}^*} (q_{1,1}^* - d_1) \frac{1}{2\delta_1 \mu_1} dd_1 = \delta_1 \mu_1 \frac{(p_1 - c_1)^2}{p_1^2}$$

$$T_2 = \int_{q_{2,1}^*}^{\mu_2(1+\delta_2)} (d_2 - q_{2,1}^*) \frac{1}{2\delta_2 \mu_2} dd_2 = \delta_2 \mu_2 \left( \frac{c_2}{p_2} \right)^2$$

Les probabilités d'occurrence liées à  $T_1$  et  $T_2$  sont respectivement :

$$\beta_1 = \int_{\mu_1(1-\delta_1)}^{q_{1,1}^*} \frac{1}{2\delta_1 \mu_1} dd_1 = \frac{p_1 - c_1}{p_1} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \int_{q_{2,1}^*}^{\mu_2(1+\delta_2)} \frac{1}{2\delta_2 \mu_2} dd_2 = \frac{c_2}{p_2}$$

En reprenant les résultats généraux de la section précédente, les stra-

tégies optimales des deux entreprises peuvent être déterminées pour chaque scénario.

**Proposition 1** – Dans le scénario 2 où la priorité est donnée à  $M_1$ , les fonctions de profit de  $F_1$  et  $F_2$  sont concaves en  $q_{1,2}$  et  $q_{2,2}$  respectivement. Elles sont maximisées pour :

$$q_{1,2}^* = \underset{q_{1,2}}{\operatorname{argmax}} (\Pi_{1,2}(q_{1,2})) = \frac{\mu_1 p_2^3 (p_1 (1 + \delta_1) - 2c_1 \delta_1) + c_2^3 \delta_2 \mu_2 (p_t - c_t)}{p_1 p_2^3}$$

$$q_{2,2}^* = \underset{q_{2,2}}{\operatorname{argmax}} (\Pi_{2,2}(q_{2,2})) = \frac{\mu_2 p_1^3 (p_2 (1 + \delta_2) - 2c_2 \delta_2) - \delta_1 \mu_1 (p_1 - c_1)^3 (p_2 - p_t)}{p_1^3 p_2}$$

Ces résultats sont déduits des deux fonctions de profit de  $F_1$  et  $F_2$  explicitées dans les équations (3) et (4). Les démonstrations sont détaillées dans l'annexe A.

**Proposition 2** – Dans le scénario 3 où la priorité est donnée à  $F_2$ , les fonctions de profit de  $F_1$  et  $F_2$  sont concaves en  $q_{1,3}$  et  $q_{2,3}$  respectivement. Elles sont maximisées pour :

$$q_{1,3}^* = \underset{q_{1,3}}{\operatorname{argmax}} (\Pi_{1,3}(q_{1,3})) = \frac{\mu_1 p_2^3 (p_1 (1 + \delta_1) - 2c_1 \delta_1) + c_2^3 p_1 \delta_2 \mu_2}{p_1 p_2^3}$$

$$q_{2,3}^* = \underset{q_{2,3}}{\operatorname{argmax}} (\Pi_{2,3}(q_{2,3})) = \frac{\mu_2 (p_t (1 + \delta_2) - 2c_2 \delta_2)}{p_t}$$

Ces résultats sont déduits des deux fonctions de profit de  $F_1$  et  $F_2$  explicitées dans les équations (5) et (6). Les démonstrations sont détaillées dans l'annexe B.

On peut remarquer que la quantité de commande de  $F_1$  est indépendante de  $c_t$  et de  $p_t$  ; ceci résulte de l'engagement pris par  $F_1$  de couvrir systématiquement la rupture de  $F_2$ . De même, la quantité de commande de  $F_2$  est indépendante du prix de vente  $p_2$  sur son marché : dans ce scénario,  $F_2$  n'est jamais en rupture et est donc toujours capable de satisfaire sa demande.

## COMPARAISON DES SCÉNARIOS

En nous appuyant sur une analyse numérique, on examine dans cette section l'intérêt relatif des trois scénarios présentés. Nous étudions les profits de  $F_1$ ,  $F_2$  et de la filière en fonction (i) du niveau du coût de transfert entre  $F_1$  et  $F_2$ , puis (ii) de la taille des marchés  $M_1$  et  $M_2$ .

## Impact du coût de transfert

Examinons tout d'abord une situation dans laquelle les prix finaux ( $p_1$  et  $p_2$ ), les coûts de la matière première ( $c_1$  et  $c_2$ ) et les marchés finaux ( $M_1$  et  $M_2$ ) sont identiques. Le transfert, quand il s'applique (scénarios 2 et 3), est effectué à un coût  $c_t$ ,  $F_1$  ne faisant aucune marge sur la quantité cédée à  $F_2$  en cas de besoin, soit  $c_1 + c_t = p_t \leq p_2$ . Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau 2 ci-dessous, où :

- $\bar{m}$  note la valeur seuil de la marge réalisée par l'opérateur considéré de part et d'autre de laquelle l'ordre de préférence des scénarios change,
- de même, pour des marges telles que  $p_i - c_i < \bar{m}$ ,  $\bar{c}_t$ , (resp.  $\bar{c}_t$ ) note la valeur seuil du coût de transfert entre  $F_1$  et  $F_2$  de part et d'autre de laquelle l'ordre de préférence des scénarios change si l'on considère l'espérance mathématique de profit de  $F_1 + F_2$  (resp. de la filière),
- *Scen. j* > *Scen. j'* note que le scénario *j* domine le scénario *j'* pour l'opérateur considéré.

Naturellement,  $F_1$  ne faisant aucune marge sur les quantités transférées à  $F_2$ , son profit n'est pas affecté quand le coût du transfert croît. L'ordre des scénarios qu'il préfère ne dépend pas du niveau de la marge finale qu'il réalise sur son propre marché ( $p_1 - c_1$ ) puisque, dans tous les cas, il préfère le scénario 2 au scénario 1 et le scénario 1 au scénario 3. Le scénario 2 lui permet d'écouler une partie de son surstock à un prix qui couvre son coût de production : même sans réaliser de marge sur le transfert, il dégage un profit supérieur à celui obtenu dans le scénario 1. Le scénario 3 est forcément le plus mauvais pour lui puisqu'il dessert une part de son marché sans pour autant réaliser de marge sur la fraction qui est cédée à  $F_2$ .

En ce qui concerne  $F_2$ , le scénario 3 est toujours meilleur que le scénario 2 qui, lui-même, est toujours meilleur que le scénario 1. Encore une fois, l'explication est simple : dans le scénario 3,  $F_2$  couvre systématiquement ses ruptures en s'approvisionnant auprès de  $F_1$  à un prix qui, au pire, lui permet de faire une marge nulle (quand  $p_t = p_2$ ).

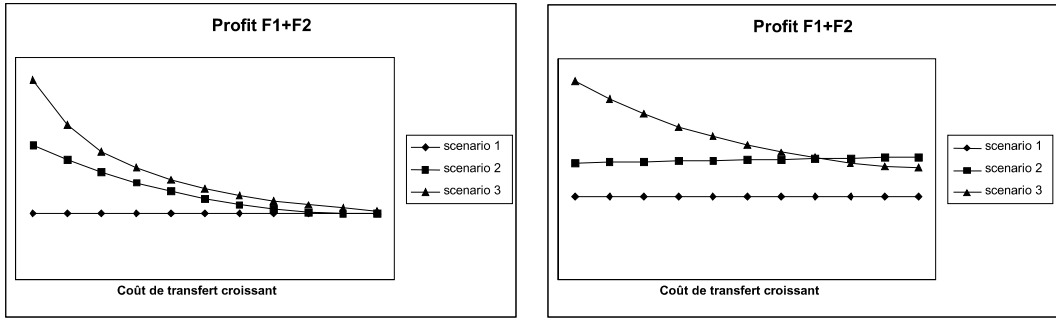
Tableau 2. Comparaison des scénarios (*Scen. j*) du point de vue des différents opérateurs

Espérance de profit	Marges élevées ( $p_i - c_i > \bar{m}$ )	Marges faibles ( $p_i - c_i < \bar{m}$ )
$F_1$	<i>Scen.2</i> > <i>Scen.1</i> > <i>Scen.3</i>	<i>Scen.2</i> > <i>Scen.1</i> > <i>Scen.3</i>
$F_2$	<i>Scen.3</i> > <i>Scen.2</i> > <i>Scen.1</i>	<i>Scen.3</i> > <i>Scen.2</i> > <i>Scen.1</i>
$F_1 + F_2$	<i>Scen.3</i> > <i>Scen.2</i> > <i>Scen.1</i>	Si $\bar{c}_t < c_t \leq p_2$ alors <i>Scen.3</i> > <i>Scen.2</i> > <i>Scen.1</i> Si $\bar{c}_t > c_t \geq c_1$ alors <i>Scen.2</i> > <i>Scen.3</i> > <i>Scen.1</i>
Filière	<i>Scen.1</i> > <i>Scen.2</i> > <i>Scen.3</i>	Si $\bar{c}_t < c_t \leq p_2$ alors <i>Scen.2</i> > <i>Scen.3</i> > <i>Scen.1</i> Si $\bar{c}_t > c_t \geq c_1$ alors <i>Scen.2</i> > <i>Scen.1</i> > <i>Scen.3</i>

L'intérêt d'une coordination entre  $F_1$  et  $F_2$  dépend en fait, d'une part, du coût de transfert  $c_t$  ( $= p_t$ ) et, d'autre part, des marges ( $p_1 - c_1$  et  $p_2 - c_2$ ) sur les marchés  $M_1$  et  $M_2$  (cf. tableau 2 et figures 2a et 2b):

**Remarque 1** – *Si les marges finales sont fortes, ou si elles sont faibles mais que le coût de transfert est faible, alors  $F_1$  et  $F_2$  peuvent s'accorder en mettant en œuvre le scénario 3 puisque, dans ce cas, la somme de leurs profits est maximisée. Sinon,  $F_1$  et  $F_2$  se limitent à la mise en place du scénario 2.*

Figure 2. Impact du coût de transfert sur le profit total  $\Pi_{1,j}^* + \Pi_{2,j}^*$



a. Marges finales faibles

b. Marges finales élevées

Si l'on raisonne maintenant sur le profit global de la filière (ce qui revient à considérer que les fournisseurs de matière première sont des entreprises indépendantes de  $F_1$  et  $F_2$ ) la remarque précédente n'est plus vérifiée.

**Remarque 2** – *Si les marges finales sont élevées, la filière dans son ensemble préfère le scénario 1, car la croissance de la somme des profits de  $F_1$  et  $F_2$  liée au scénario 3 ne suffit pas à compenser les pertes des entreprises  $S_1$  et  $S_2$  dues à la diminution des quantités qui leur sont commandées. On ne peut trouver dans ce cas de modalité de partage des gains favorable à une forme de coordination de filière (voir figure 3a).*

*Si les marges finales sont faibles, la filière, dans son ensemble, préfère le scénario 2, car, dans ce cas, la croissance de la somme des profits de  $F_1$  et  $F_2$  compense la somme des pertes de  $S_1$  et  $S_2$ . On peut alors, dans le cadre de ce scénario, trouver une modalité de partage des gains bénéficiant à l'ensemble des opérateurs (voir figure 3b).*

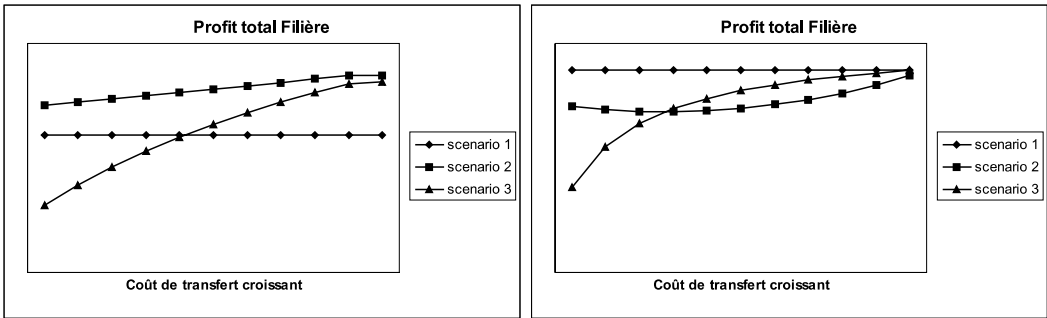
En effet, les quantités commandées auprès de  $S_1$  et  $S_2$  varient sensiblement selon deux critères, à savoir :

- Le niveau des marges finales sur  $M_1$  et  $M_2$  : plus ces marges sont élevées, plus le coût des ruptures sur les marchés finaux est élevé. Rappelons que, dans ce type de modélisation, une unité de demande finale non satisfaite coûte la marge qu'on aurait obtenue si cela n'avait pas été le cas. Ainsi, plus les marges finales sont élevées et plus les entreprises  $F_1$  et  $F_2$  ont tendance à commander des quantités plus importantes au-

près de  $S_1$  et  $S_2$  pour réduire les risques de ruptures de plus en plus coûteuses.

– Les scénarios retenus: plus la coordination est importante entre  $F_1$  et  $F_2$  et plus les quantités commandées auprès de  $S_1$  et  $S_2$  diminuent. Elles peuvent en effet répondre aussi bien à la demande finale en commandant moins.

Figure 3. Impact du coût de transfert sur le profit total de la filière



a. Marges finales faibles

b. Marges finales élevées

## Impact de marchés de taille différenciée

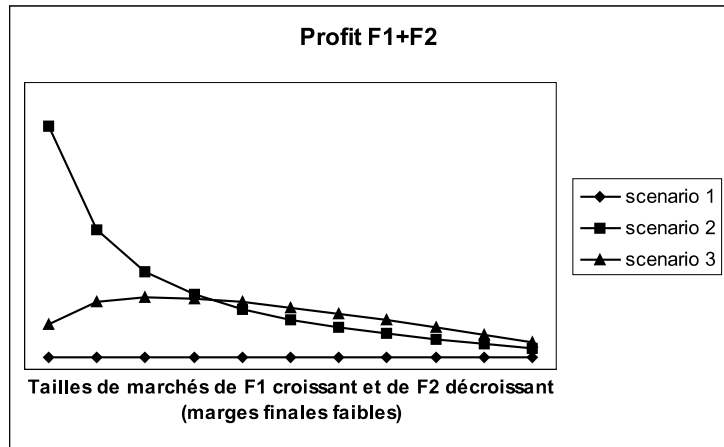
On suppose maintenant que les marchés  $M_1$  et  $M_2$  ne sont plus identiques en taille et que l'une ou l'autre des entreprises  $F_1$  ou  $F_2$  peut concentrer une fraction plus importante des ventes (pour un marché total  $M_1 + M_2$  constant). On ne raisonne ici que sur le profit joint de  $F_1$  et  $F_2$  et sur le profit global de la filière. Il nous faudrait, sinon, discuter des types de contrats qui permettraient à  $F_1$  et  $F_2$  de travailler ensemble alors que  $F_1$  a transféré une partie de ses marchés à  $F_2$ , ce qui sort du cadre de cet article.

**Remarque 3** – Dans le cas où une part importante des marchés est attribuée à  $F_2$ , le scénario 2 est préféré par  $F_1$  et  $F_2$  (figure 4) et par la filière (figure 5), sauf quand les marges finales sont élevées et le coût de transfert faible. Dans cette situation, le scénario 3 est préféré par  $F_1$  et  $F_2$  et le scénario 2 par la filière dans son ensemble. Dans tous les cas de figure, la somme des profits de  $F_1$  et  $F_2$  d'une part, et la somme des profits de la filière d'autre part, sont d'autant plus élevées que la taille de  $M_2$  est importante par rapport à celle de  $M_1$ .

D'une façon générale, l'augmentation de  $M_2$  se traduit par une croissance du profit de  $F_2$  mais avec des niveaux plus élevés dans le cadre du scénario 3, puisque dans ce cas  $F_2$  ne subit aucune rupture face à la demande finale. A l'inverse, le profit de  $F_1$  a tendance à baisser naturellement puisque son propre marché diminue. Mais cette chute est contrebalancée par la croissance de la rupture potentielle de  $F_2$  et donc un transfert plus important en direction de celui-ci. L'évolution du profit

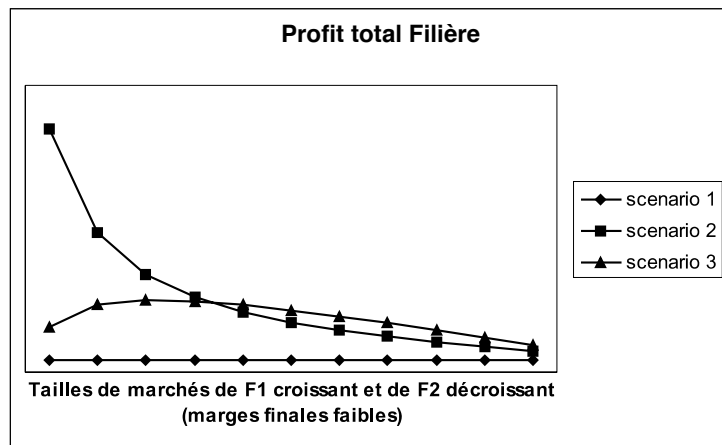
joint de  $F_1$  et  $F_2$  résulte de la combinaison de ces différents effets (et de l'impact des marges et du coût de transfert déjà explicité).

Figure 4.  
Évolution du profit total des deux entreprises en fonction de la taille relative des marchés finaux



La somme des profits de  $S_1$  et  $S_2$  est également croissante avec  $M_2$ . La rupture potentielle de celui-ci augmentant, la commande auprès de  $F_1$  croît aussi et compense ainsi (partiellement) la réduction du marché propre de  $F_1$ . Le scénario 2 assure un profit plus élevé aux fournisseurs puisque les quantités commandées sont dans ce cas plus élevées que dans le scénario 3. Le résultat global pour la filière dépend de la conjonction de ces évolutions induites par l'écart de taille des marchés de  $F_1$  et  $F_2$ .

Figure 5.  
Évolution du profit total de la filière en fonction de la taille relative des marchés finaux



## CONCLUSION

La question du renforcement des modalités de coordination horizontale entre producteurs fait l'objet de positions contradictoires. D'un côté, ces démarches de « concentration » sont favorisées au niveau européen, en particulier dans le cadre de l'OCM fruits. D'un autre côté, elles sont

contestées à cause des effets négatifs qui pourraient résulter d'un pouvoir de marché excessif de l'amont (Rey et Tirole, 2000).

Sans développer ce débat ici, l'analyse présentée permet d'exhiber un aspect qui doit être pris en compte dans un bilan plus global des effets positifs et négatifs du regroupement de l'offre. Il s'agit des gains permis par un meilleur ajustement de l'offre aux aléas de demande.

Dans le cas des filières de fruits frais, évoqué en première partie, l'objectif de cette centralisation des activités commerciales en amont est de regrouper des unités de production et d'expédition au sein d'une même structure commerciale, afin de favoriser la mise en place de gammes de produits et d'exploiter les complémentarités entre ces unités, de façon à ce que les ruptures des unes soient compensées par les excédents momentanés des autres (on se trouve alors dans le cas où  $F_1$  et  $F_2$  commercialisent leurs produits en direction des mêmes marchés). L'objectif est donc de pouvoir garantir une réponse à une demande aléatoire sans induire des surcoûts trop importants. On peut penser que ces complémentarités sont d'autant plus fortes que les unités en question sont situées dans des contextes plus variés (zones de production soumises à des conditions climatiques différentes, clients variés...). Cependant, elles sont d'autant plus difficiles à mettre en application que les coûts de leur mise en œuvre sont élevés. Il peut s'agir, par exemple, de coûts logistiques liés au transfert de matière, ou de coûts liés aux pertes de produits du fait de l'accroissement du délai de mise en vente (périssabilité).

L'analyse proposée ici permet de mettre en avant quelques résultats. Si l'on discute du cas de filières agricoles de produits non (ou peu) transformés dans lesquelles les marges finales sont relativement faibles, une certaine centralisation des ventes reposant, à la fois, sur la recherche de synergies entre opérateurs de même niveau dans la chaîne de production-commercialisation, et sur la constitution d'unités commerciales regroupées, s'avère bénéfique pour les différents opérateurs de la filière. Elle permet d'accroître l'efficacité de l'ensemble en assurant une meilleure maîtrise des aléas. C'est le cas notamment dans l'exemple de la filière fruit déjà évoquée, où les fluctuations extrêmement fortes de la production peuvent nécessiter des coopérations entre producteurs, pour assurer une mise à disposition moyenne correspondant aux volumes élevés demandés en aval par des opérateurs de plus en plus concentrés. Il est en effet très difficile de prévoir les dates de mise à disposition des fruits, la récolte étant très fortement tributaire des aléas climatiques, et le regroupement de l'offre peut permettre d'éviter des ruptures d'approvisionnement des clients en aval en faisant jouer des complémentarités entre zones de production tout en assurant des volumes livrés importants.

Le mode de coordination à privilégier diffère selon que l'on considère  $F_1$  et  $F_2$  seuls (on se trouve alors, par exemple, dans le cas de deux structures de production, conditionnement et vente), ou l'ensemble de la filière. Dans certains cas, il est préférable de s'en tenir à une relation d'ajuste-

ment ponctuel reposant sur des transferts de matière quand, simultanément, l'un est en rupture et l'autre en excédent. Dans d'autres cas, la relation doit être plus étroite, l'un devenant un fournisseur privilégié de l'autre. L'analyse a permis de mettre en avant certains critères qui peuvent orienter le choix : le coût du transfert, bien sûr, mais aussi le niveau des marges finales et les tailles respectives des marchés de  $F_1$  et  $F_2$ .

A travers cette démarche, nous avons essayé de discuter de l'intérêt du regroupement de l'offre et de la centralisation des ventes dans l'agro-alimentaire, en proposant une formalisation appuyée sur un modèle de recherche opérationnelle (et reprenant certaines hypothèses du « *news-boy* »). Les résultats obtenus dans cet article reposent cependant sur une démarche qui doit être enrichie.

Tout d'abord, nous nous sommes placés ici dans le cadre de demandes suivant des lois uniformes. Il conviendrait d'examiner la robustesse des résultats obtenus sous d'autres hypothèses de distribution de la demande (loi normale en particulier).

Il serait par ailleurs utile de traiter la question en intégrant une dimension multi-périodique : il faudrait en effet pouvoir discuter de l'intérêt des modes de coordination que l'on a envisagés ici quand chaque entreprise peut, soit transférer (ou recevoir) un flux de matière à chaque période, soit utiliser ses surstocks pour couvrir ses éventuelles ruptures la période suivante. La dimension multi-périodique pourrait être étudiée à l'aide d'une modélisation analytique telle celle développée dans cet article ou par des approches basées sur la simulation (Thiel, 1998).

Une autre voie d'extension de ce travail concerne les informations échangées sur lesquelles repose la coordination. Nous avons supposé que la coordination reposait ici sur l'échange d'une information particulière : le niveau moyen des ruptures et des surstocks auxquels chaque entreprise doit faire face en l'absence de coordination. D'autres modalités de coordination devraient pouvoir être discutées. En particulier, une coordination entre  $F_1$  et  $F_2$  pourrait être modélisée par une optimisation conjointe des quantités de commande. Dans ce cas, les fonctions de profit de chacun seraient dépendantes des quantités de commande  $q_1$  et  $q_2$ . Cependant, pour des demandes aléatoires suivant des lois normales, la concavité de ces fonctions n'est pas prouvée. Il conviendrait alors d'utiliser des méthodes d'optimisation approchées (heuristiques, algorithmes génétiques ; voir Carter et Price, 2001 pour une introduction à ces approches).

## BIBLIOGRAPHIE

- ANUPINDI (R.), AKELLA (R.), 1993 — Diversification under supply uncertainty, *Management Science*, 39 (8), pp. 944-963.
- ANUPINDI (R.), BASSOK (Y.), 1999 — Supply contracts with quantity commitments and stochastic demand, in: GANESHAN (R.), MAGAZINE (M.), TAYUR (S.) (eds), *Quantitative Models for Supply Chain Management*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, ch. 7, pp. 197-232.
- BASSOK (Y.), AKELLA (R.), 1991 — Ordering and production decisions with supply quality and demand uncertainty, *Management Science*, 37 (12), pp. 1556-1574.
- CACHON (G.-P.), LARIVIERE (M.-A.), 1999 — Capacity choice and allocation: strategic behavior and supply chain performance, *Management Science*, 45 (8), pp. 1091-1108.
- CARTER (M. W.), PRICE (C. C.), 2001 — *Operations Research. A Practical Introduction*, CRC Press, 394 p.
- COOKE (J.), 1994 — Logistics quality: Part III – Beyond quality... speed, *Traffic Management*, 33 (6), pp. 7-32.
- DAVIES (M.), 1997 — Shifting into high gear, *Director*, 50, pp. 46-51.
- ELLRAM (L. M.), LA LONDE (B.-J.), WEBER (M. M.), 1989 — Retail logistics, *International Journal of Physical Distribution and Materials Management*, 19 (12), pp. 29-39.
- FIORITO (S. S.), MAY (E. G.), STRAUGHN (K.), 1995 — Quick response in retailing: components and implementation, *International Journal of Retail and Distribution Management*, 23 (5), pp. 12-21.
- GANESHAN (R.), TYWORTH (J. E.) et GUO (Y.), 1999 — Dual sourced supply chains: the discount supplier option, *Transportation Research Part E*, 35, pp. 11-23.
- GAVIRNENI (S.), TAYUR (S.), 1999 — Value of information sharing and comparison with delayed differentiation, in: GANESHAN (R.), MAGAZINE (M.), TAYUR (S.) (eds), *Quantitative Models for Supply Chain Management*, Dordrecht Kluwer Academic Publishers, ch. 15, pp. 442-466.
- HARRIS (J. K.), SWATMAN (P. M. C.), KURNIA (S.), 1999 — Efficient consumer response (ECR): a survey of the Australian grocery industry, *Supply Chain Management*, 4 (1), pp. 35-42.
- IYER (A. V.), BERGEN (M. E.), 1997 — Quick response in manufacturer retailers channels, *Management Science*, 43 (4), pp. 559-570.

- JANSSEN (F.), DE KOK (T.), 1999 — A two-supplier inventory model, *International Journal of Production Economics*, 59, pp. 395-403.
- JEULAND (A. P.), SHUGAN (S. M.), 1983 — Managing channel profits, *Marketing Science*, 2, pp. 239-272.
- KELLE (P.), SILVER (E.), 1990 — Safety stock reduction by order splitting, *Naval Research Logistics*, 37, pp. 725-743.
- KHOUJA (M. J.), 1995 — The newsboy problem under progressive multiple discounts, *European Journal of Operational Research*, 84, pp. 458-466.
- KURNIA (S.), SCHAUDER (D.), SWATMAN (P. M. C.), 1998 — Efficient consumer response: a preliminary comparison of US and European experiences, the 11th international Bled electronic commerce conference, Bled, Slovénie.
- LAL (R.), STAELIN (R.), 1984 — An approach for developing an optimal discount pricing policy, *Management Science*, 30, pp. 720-726.
- LAU (H. S.), LAU (A. H. L.), 1999 — Manufacturer's pricing strategy and return policy for a single period commodity, *European Journal of Operational Research*, 116, pp. 291-304.
- LAU (A. H. L.), LAU (H. S.), 1998 — Decision models for single period products with two ordering opportunities, *International Journal of Production Economics*, 55, pp. 57-70.
- LAU (A. H. L.), LAU (H. S.), 1994 — Coordinating two suppliers with offsetting lead time and price performance, *Journal of Operations Management*, 11, pp. 327-337.
- LAU (H. S.), 1997 — Simple formulas for the expected costs in the newsboy problem: an educational note, *European Journal of Operational Research*, 100, pp. 557-561.
- LIN (C. S.), KROLL (D. E.), 1997 — The single-item newsboy problem with dual performance measures and quantity discounts, *European Journal of Operational Research*, 100, pp. 562-565.
- MONAHAN (J. P.), 1984 — A quantity discount pricing model to increase vendor profits, *Management Science*, 30, pp. 720-726.
- NAHMIA (S.), 2001 — *Production and Operations Analysis*, New York, Mc Graw International Edition, Management and Organization Series (4<sup>e</sup> édition), 810 p.
- NAKHLA (M.), 1993 — Stratégies de planification et d'ordonnement: le cas de l'industrie laitière, *Cahiers d'économie et sociologie rurales*, 28, pp. 139-161.

- PADMANABHAN (V.), PNG (I.), 1997 — Manufacturer's return policies and retail competition, *Marketing Science*, 16, pp. 81-94.
- PARLAR (M.), WENG (Z. K.), 1997 — Designing a firm's coordinated manufacturing and supply decisions with short product life cycles, *Management Science*, 43 (10), pp. 1329-1344.
- PENMAN (I.), 1997 — Efficient unit load, *Logistics Focus*, 5, pp. 2-6.
- RADEMAKERS (M. F. L.), MCKNIGHT (P.), 1998 — Concentration and interfirm cooperation within the Dutch potato supply chain, *Supply Chain Management*, 3 (4), pp. 203-213.
- REY (P.), TIROLE (J.), 2000 — Quelles régulations pour le commerce?, in: Régulation des relations entre fournisseurs et distributeurs, *Rapport du Conseil d'Analyse économique*, Paris, Documentation Française, pp. 9-36.
- SCULLI (D.), SHUM (Y.), 1990 — Analysis of a continuous review stock control model with multiple suppliers, *Journal of the Operational Research Society*, 41, pp. 973-977.
- SCULLI (D.), WU (S. Y.), 1981 — Stock control with two suppliers and normal lead times, *Journal of the Operational Research Society*, 32, pp. 1003-1009.
- SOLER (L.-G.), TANGUY (H.), 1998 — Coordination between production and commercial planning: organisational and modelling issues, *International Transactions in Operational Research*, 5 (3), pp. 171-188.
- THIEL (D.), 1998 — Mise en évidence de l'instabilité des modèles de réapprovisionnement continu par une analyse dynamique des systèmes logistiques, *Économie Rurale*, 246, pp. 56-68.
- TSAY (A. A.), 1999 — The quantity flexibility contract and supplier-customer incentives, *Management Science*, 45 (10), pp. 1339-1358.
- TSAY (A. A.), NAHMIA (S.), AGRAWAL (N.), 1999 — Modelling supply chain contracts: a review, in: GANESHAN (R.), MAGAZINE (M.), TAYUR (S.) (eds), *Quantitative Models for Supply Chain Management*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, ch. 10, pp. 301-336.
- VAN HOEK (R.), 1997 — Postponed manufacturing: a case study in the food supply chain, *Supply Chain Management*, 2 (2), pp. 63-75.
- WENG (Z. K.), 1995 — Channel coordination and quantity discounts, *Management Science*, 41, pp. 1509-1522.

ANNEXE A

Nous explicitons ici tout d'abord le calcul des profits des deux entreprises  $F_1$  et  $F_2$  puis nous démontrons les résultats de la proposition 1

**A.1. Profit de  $F_1$  (scénario 2)**

Dans le scénario 2,  $F_1$  donne la priorité à son propre marché et commande une quantité  $q_{1,2}$ . Si la demande observée  $d_1$  est supérieure à  $q_{1,2}$ , alors, aucun transfert ne peut avoir lieu vers  $F_2$  – cette situation correspond au premier terme du profit donné par (7). Si  $F_1$  a des surstocks, *i.e.*  $d_1 \leq q_{1,2}$ , alors soit  $F_1$  considère un potentiel transfert de quantité  $T_2$  (avec une probabilité  $\beta_2$ ), soit  $F_1$  considère qu'aucun transfert n'a lieu (avec une probabilité  $1 - \beta_2$ ). Ces deux cas sont exprimés respectivement par le second (deuxième et troisième lignes) et le troisième terme du profit. Le second terme se décompose en deux intégrales, selon la position du surstock ( $q_{1,2} - d_1$ ) par rapport à la quantité potentielle de transfert  $T_2$ . Le tableau suivant récapitule les divers flux financiers (prix et coût) en fonction de tous les cas cités précédemment :

Configurations	Achat ( $S_1$ )	Vente ( $M_1$ )	Surcoût ( $F_2$ )	Vente ( $F_2$ )
$q_{1,2} \leq d_1$	$c_1 q_{1,2}$	$p_1 d_1$	0	0
$q_{1,2} \geq d_1$ et transfert $T_2$ ( $\beta_2$ ) et $q_{1,2} - d_1 \geq T_2$	$c_1 q_{1,2}$	$p_1 q_{1,2}$	$c_t T_2$	$p_t T_2$
$q_{1,2} \geq d_1$ et transfert $T_2$ ( $\beta_2$ ) et $q_{1,2} - d_1 \leq T_2$	$c_1 q_{1,2}$	$p_1 q_{1,2}$	$c_t (q_{1,2} - d_1)$	$p_t (q_{1,2} - d_1)$
$q_{1,2} \geq d_1$ et pas de transfert ( $1 - \beta_2$ )	$c_1 q_{1,2}$	$p_1 d_1$	0	0

Cette analyse permet de déterminer mathématiquement le profit de  $F_1$ , à savoir :

$$\begin{aligned}
 \Pi_{1,2}(q_{1,2}) = & \int_{q_{1,2}}^{\mu_1(1+\delta_1)} ((p_1 - c_1)q_{1,2}) \frac{1}{2\delta_1\mu_1} dd_1 \\
 & + \beta_2 \left[ \int_{\mu_1(1-\delta_1)}^{q_{1,2}-T_2} ((p_1 - c_1)d_1 + (p_t - c_1 - c_t)T_2 - c_1(q_{1,2} - d_1 - T_2)) \frac{1}{2\delta_1\mu_1} dd_1 \right. \\
 & \quad \left. + \int_{q_{1,2}-T_2}^{q_{1,2}} ((p_1 - c_1)d_1 + (p_t - c_1 - c_t)(q_{1,2} - d_1)) \frac{1}{2\delta_1\mu_1} dd_1 \right] \\
 & + (1 - \beta_2) \int_{\mu_1(1-\delta_1)}^{q_{1,2}} (p_1 d_1 - c_1 q_{1,2}) \frac{1}{2\delta_1\mu_1} dd_1
 \end{aligned} \tag{7}$$

En substituant  $\beta_2$  et  $T_2$  par leur valeur et en calculant les intégrales, on obtient :

$$\Pi_{1.2}(q_{1.2}) = -\frac{p_1}{4\delta_1\mu_1} (q_{1.2})^2 + K_1(q_{1.2}) - K_2$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des termes constants. Comme  $p_1$ ,  $\delta_1$  et  $\mu_1$  sont strictement positifs par hypothèse, le profit de  $F_1$  est une fonction concave en  $q_{1.2}$ . En résolvant l'équation  $d(\Pi_{1.2}(q_{1.2}))/dq_{1.2} = 0$ , on obtient le résultat de la proposition :

$$q_{1.2}^* = \underset{q_{1.2}}{\operatorname{argmax}} (\Pi_{1.2}(q_{1.2})) = \frac{\mu_1 p_2^3 (p_1(1 + \delta_1) - 2c_1\delta_1) + c_2^3 \delta_2 \mu_2 (p_t - c_t)}{p_1 p_2^3}$$

### A.2. Profit de $F_2$ (scénario 2)

On procède de manière similaire pour déterminer le profit de  $F_2$  en fonction de la quantité commandée  $q_{2.2}$ . Le premier terme de l'équation (8) modélise le cas où la demande observée est inférieure à  $q_{2.2}$ . Dans ce cas,  $F_2$  ne fait pas appel à  $F_1$  et aucun transfert n'a lieu. Si  $F_2$  est en rupture, i.e.  $d_2 \geq q_{2.2}$ , alors  $F_2$  va prendre en compte soit un transfert maximal potentiel de  $T_1$  (surstock moyen de  $F_1$ , disponible avec une probabilité  $\beta_1$ ), soit aucun transfert (avec une probabilité  $1 - \beta_1$ ). On retrouve ces deux cas dans les deuxième et troisième termes de (8). Le deuxième terme est éclaté en deux composantes, prenant en compte la position relative du surstock  $T_1$  par rapport à la rupture de  $F_2$  ( $d_2 - q_{2.2}$ ). L'étude des différents cas est résumée dans le tableau suivant :

Configurations	Achat ( $S_2$ )	Achat ( $F_1$ )	Vente ( $M_2$ )
$d_2 \leq q_{2.2}$	$c_2 q_{2.2}$	0	$p_2 d_2$
$d_2 \geq q_{2.2}$ et transfert $T_1$ ( $\beta_1$ ) et $d_2 - q_{2.2} \geq T_1$	$c_2 q_{2.2}$	$p_t (d_2 - q_{2.2})$	$p_2 d_2$
$d_2 \geq q_{2.2}$ et transfert $T_1$ ( $\beta_1$ ) et $d_2 - q_{2.2} \geq T_1$	$c_2 q_{2.2}$	$p_t T_1$	$p_t (q_{2.2} + T_1)$
$d_2 \geq q_{2.2}$ et pas de transfert ( $1 - \beta_1$ )	$c_2 q_{2.2}$	0	$p_2 q_{2.2}$

Le profit de  $F_2$  a donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_{2.2}(q_{2.2}) = & \int_{\mu_2(1-\delta_2)}^{q_{2.2}} (p_2 d_2 - c_2 q_{2.2}) \frac{1}{2\delta_2 \mu_2} dd_2 \\ & + \beta_1 \left[ \int_{q_{2.2}}^{q_{2.2}+T_1} (p_2 - c_2) q_{2.2} + (d_2 - q_{2.2}) p_t - c_2 q_{2.2} \right] \frac{1}{2\delta_2 \mu_2} dd_2 \\ & + \int_{q_{2.2}+T_1}^{\mu_2(1+\delta_2)} (p_2 (q_{2.2} + T_1) - (c_2 q_{2.2} + p_t T_1)) \frac{1}{2\delta_2 \mu_2} dd_2 \Big] \quad (8) \\ & + (1 - \beta_1) \int_{q_{2.2}}^{\mu_2(1+\delta_2)} (p_2 - c_2) q_{2.2} \frac{1}{2\delta_2 \mu_2} dd_2 \end{aligned}$$

En calculant les intégrales, nous obtenons le profit suivant :

$$\Pi_{2.2}(q_{2.2}) = -\frac{p_2}{4\delta_2\mu_2}(q_{2.2})^2 + K_3(q_{2.2}) + K_4$$

où  $K_3$  et  $K_4$  sont des termes constants. Le profit de  $F_2$  est bien une fonction concave en  $q_{2.2}$ . En résolvant  $d(\Pi_{2.2}(q_{2.2}))/dq_{2.2} = 0$ , on obtient la quantité optimale de commande de  $F_2$  auprès du fournisseur  $S_2$  :

$$q_{2.2}^* = \frac{\mu_2 p_1^3 (p_2(1 + \delta_2) - 2c_2\delta_2) - \delta_1 \mu_1 (p_1 - c_1)^3 (p_2 - p_t)}{p_1^3 p_2}$$

ANNEXE B

Cette démonstration est similaire à la précédente, aussi nous ne donnerons que les tableaux explicitant les situations de manière exhaustive, puis la forme générale des profits de chaque firme.

**B.1. Profit de  $F_1$  (scénario 3)**

Soit  $q_{1,3}$  la quantité commandée par  $F_1$  auprès de  $S_1$ . En privilégiant  $F_2$ , nous avons les situations suivantes :

Configurations	Achat ( $S_1$ )	Vente ( $M_1$ )	Surcoût ( $F_2$ )	Vente ( $F_2$ )
Transfert $T_2$ ( $\beta_2$ ) et $d_1 \leq q_{1,3} - T_2$	$c_1 q_{1,3}$	$p_1 d_1$	$c_t T_2$	$p_t T_2$
Transfert $T_2$ ( $\beta_2$ ) et $d_1 \geq q_{1,3} - T_2$	$c_1 q_{1,3}$	$p_1 (q_{1,3} - T_2)$	$c_t T_2$	$p_t T_2$
Pas de transfert ( $1 - \beta_2$ ) et $d_1 \geq q_{1,3}$	$c_1 q_{1,3}$	$p_1 q_{1,3}$	0	0
Pas de transfert ( $1 - \beta_2$ ) et $d_1 \leq q_{1,3}$	$c_1 q_{1,3}$	$p_1 d_1$	0	0

Ceci permet de donner la forme générale du profit de  $F_1$ , soit :

$$\begin{aligned} \Pi_{1,3}(q_{1,3}) = & \beta_2 \left[ \int_{\mu_1(1-\delta_1)}^{q_{1,3}-T_2} ((p_1 - c_1)d_1 + (p_t - c_1 - c_t)T_2 - c_1(q_{1,3} - d_1 - T_2)) \frac{1}{2\delta_1\mu_1} dd_1 \right. \\ & \left. + \int_{q_{1,3}-T_2}^{\mu_1(1+\delta_1)} ((p_1 - c_1)(q_{1,3} - T_2) + (p_t - c_1 - c_t)T_2) \frac{1}{2\delta_1\mu_1} dd_1 \right] \\ & + (1 - \beta_2) \left[ \int_{q_{1,3}}^{\mu_1(1+\delta_1)} (p_1 d_1 - c_1 q_{1,3}) \frac{1}{2\delta_1\mu_1} dd_1 + \int_{\mu_1(1-\delta_1)}^{q_{1,3}} ((p_1 - c_1)q_{1,3}) \frac{1}{2\delta_1\mu_1} dd_1 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Le calcul des différentes intégrales nous donne :

$$\Pi_{1,3}(q_{1,3}) = -\frac{p_1}{4\delta_1\mu_1}(q_{1,3})^2 + K_5(q_{1,3}) + K_6$$

où  $K_5$  et  $K_6$  sont des constantes. Ainsi, la concavité de  $\Pi_{1,3}(q_{1,3})$  est démontrée. En résolvant l'équation  $d(\Pi_{1,3}(q_{1,3}))/dq_{1,3} = 0$ , on obtient la quantité optimale de commande de  $F_1$  auprès du fournisseur  $S_1$  :

$$q_{1,3}^* = \frac{\mu_1 p_2^3 (p_1 (1 + \delta_1) - 2c_1 \delta_1) + c_2^3 p_1 \delta_2 \mu_2}{p_1 p_2^3}$$

### B.2. Profit de $F_2$ (scénario 3)

Soit  $q_{2.3}$  la quantité commandée par  $F_2$  auprès de  $S_2$ . Nous avons les situations suivantes sachant que la rupture de  $F_2$  est couverte par  $F_1$  :

Configurations	Achat ( $S_2$ )	Achat ( $F_1$ )	Vente ( $M_2$ )
$d_2 \leq q_{2.3}$	$q_{2.3}$	0	$d_2$
$d_2 \geq q_{2.3}$	$q_{2.3}$	$d_2 - q_{2.3}$	$d_2$

Ceci permet de déduire la forme générale du profit de  $F_2$ , soit :

$$\begin{aligned} \Pi_{2.3}(q_{2.3}) &= \int_{\mu_2(1-\delta_2)}^{q_{2.3}} (p_2 d_2 - c_2 q_{2.3}) \frac{1}{2\delta_2 \mu_2} dd_2 \\ &+ \int_{q_{2.3}}^{\mu_2(1+\delta_2)} (p_2 d_2 - c_2 q_{2.3} - p_t(d_2 - q_{2.3})) \frac{1}{2\delta_2 \mu_2} dd_2 \end{aligned}$$

D'où

$$\Pi_{2.3}(q_{2.3}) = -\frac{p_t}{4\delta_2 \mu_2} (q_{2.3})^2 + K_7(q_{2.3}) + K_8$$

où  $K_7$  et  $K_8$  sont des termes constants. Le profit de  $F_2$  est donc bien une fonction concave en  $q_{2.3}$ . La solution de l'équation  $d(\Pi_{2.3}(q_{2.3}))/dq_{2.3} = 0$  nous donne alors :

$$q_{2.3}^* = \frac{\mu_2(p_t(1 + \delta_2) - 2c_2\delta_2)}{p_t}$$

